Exercice n°1 :

- Le point A d'affixe $a = 5 - i\sqrt{3}$
- Le point B tel que le triangle OAB soit équilatéral direct
- Le milieu Q de [OB].

1. a) OAB soit équilatéral direct $\Leftrightarrow$

$$r_{\left(O,\frac{\pi}{3}\right)}(A) = B \Leftrightarrow z_B = e^{i\frac{\pi}{3}} z_A \Leftrightarrow b = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(5 - i\sqrt{3}\right) = \frac{5}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 5i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} = 4 + 2i\sqrt{3}$$

Q = O * B $\Leftrightarrow$ q = $\dfrac{b}{2} = 2 + i\sqrt{3}$.

b) ABQK est un parallélogramme $\Leftrightarrow$

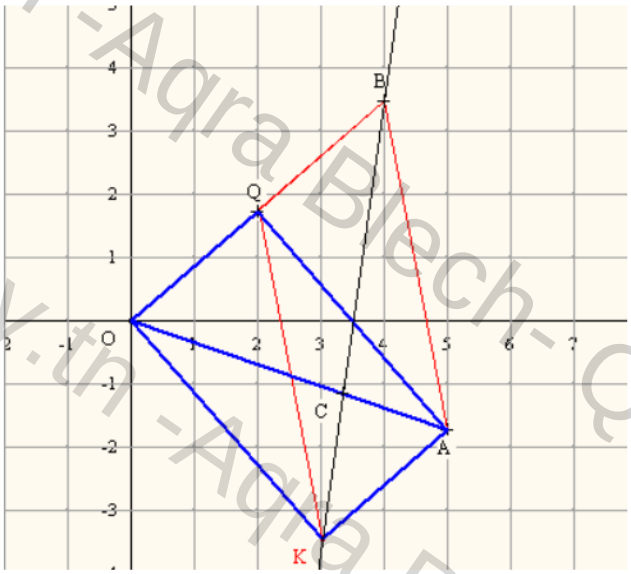
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KQ} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{KQ}} \Leftrightarrow b - a = q - k \Leftrightarrow k = q - b + a = 2 + i\sqrt{3} - 4 - 2i\sqrt{3} + 5 - i\sqrt{3} + = 3 - 2i\sqrt{3}$

c) $\dfrac{z_K - a}{z_K} = \dfrac{3 - 2i\sqrt{3} - 5 + i\sqrt{3}}{3 - 2i\sqrt{3}} = \dfrac{-2 - i\sqrt{3}}{3 - 2i\sqrt{3}} = \dfrac{\left(-2 - i\sqrt{3}\right)\left(3 + 2i\sqrt{3}\right)}{21} = \dfrac{-7i\sqrt{3}}{21} = -i\dfrac{\sqrt{3}}{3} \in iIR$

$\dfrac{z_{\overrightarrow{AK}}}{z_{\overrightarrow{OK}}} \in iIR \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} \perp \overrightarrow{OK} \Leftrightarrow$ OKA est un triangle rectangle en K.

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{KA} \Rightarrow$ OQAK est un parallélogramme, de plus on a : (KO) $\perp$ (KA) $\Rightarrow$ OQKA est un rectangle.

d)



2. $c = \dfrac{2a}{3}$.

a) $\dfrac{z_K - b}{z_K - c} = \dfrac{3 - 2i\sqrt{3} - 4 - 2i\sqrt{3}}{3 - 2i\sqrt{3} - \frac{2}{3}\left(5 - i\sqrt{3}\right)} = \dfrac{-1 - 4i\sqrt{3}}{-\frac{1}{3} - 4i\frac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{1 + 4i\sqrt{3}}{\frac{1 + 4i\sqrt{3}}{3}} = 3 \in IR \Rightarrow$ B, C et K sont alignés.

b) Voir figure.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn
Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn